Exercices Série 17

1. Prouvez par récurrence que
$$u_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1\,.$$

2. Prouvez, par récurrence, que
$$u_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Soit u_n défini par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$. Alors pour tout $n \in N^*$, $0 < u_n \leq 1$.

Réponses

1. $u_0 = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^2 - 1$ => c'est ok. Idem pour $u_1 = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$ => c'est ok aussi.

   Supposons donc que l'égalité soit vraie pour u_n, et montrons qu'elle l'est aussi pour u_{n+1}. Nous devons donc prouver que si $u_n = 2^{n+1} - 1$, alors $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$.

   Or
$$u_{n+1} = 2^{n+1} + u_n = 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2(2^{n+1}) - 1 = 2^{n+2} - 1.$$
   Nous retrouvons donc bien l'équation souhaitée, ce qui prouve, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_0 = 0^2 = \frac{0(1)(1)}{6} = 0$ => c'est ok. Idem pour $u_1 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ => c'est ok aussi.

   Supposons donc que l'égalité soit vraie pour u_n, et montrons qu'elle l'est aussi pour u_{n+1}.

   Or
$$u_{n+1} = (n+1)^2 + u_n = (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$u_{\blacksquare} = u_{n+1} = \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6n^2 + 12n + 6 + 2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$
$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{([\boldsymbol{n+1}])([\boldsymbol{n+1}] + 2)(2[\boldsymbol{n+1}] + 1)}{6} = \frac{(\blacksquare)(\blacksquare + 1)(2\blacksquare + 1)}{6}$$

Nous retrouvons donc bien l'équation souhaitée, ce qui prouve, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Etant donné que la règle s'applique à N^*, commençons par vérifier si la proposition est vraie pour le premier élément, à savoir u_1 :
   $u_1 = \frac{1}{2} \in (0{,}1]$, nous avons donc que la condition initiale est vraie.
   Supposons donc par récurrence que $u_n \in (0{,}1]$, et montrons que $u_{n+1} \in (0{,}1]$.
   D'abord, notons que si $u_n \in (0, 1]$, alors $1 + 2u_n > 0$ et $2 + u_n > 0$, ce qui implique que la fraction $\frac{1+2u_n}{2+u_n} > 0$.
   De plus, prenons le numérateur :
   $$1 + 2u_n = 1 + u_n + u_n \leq^1 1 + u_n + 1 = 2 + u_n.$$

   L'introduction de l'inégalité $\leq^{(1)}$ est justifiée par le fait que $u_n \leq 1$ (que nous savons par l'hypothèse de récurrence).
   Donc, nous avons prouvé que $1 + 2u_n \leq 2 + u_n$ ce qui implique que
   $$\frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} \leq 1.$$

   Donc, nous avons prouvé que
   $$0 < \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} \leq 1,$$
   ce qui conclut la preuve.